04/12/2018

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε ως σύνολο δεικτών το $I = \{1, \dots, n\}$ κάθε στοιχείο του $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ δηλ. κάθε διατεταγμένη n-άδα μπορεί να θεωρηθεί $f : I \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ώστε για κάθε $i \in I$ $f(i) = a_i \in A_i$. Έτσι το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων.

$$f : \underset{\{1, \dots, n\}}{\underset{\parallel}{I}} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{ώστε} \quad f(i) \in A_i.$$

Αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω γενίκευση. Το καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ (που συμβολίζεται $\prod_{i \in I} A_i$) (χρησιμοποιείται και ο συμβ. $\bigtimes_{i \in I} A_i$) είναι το σύνολο

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \text{ με } f(i) \in A_i \ \forall i \in I \}$$

Αν $\alpha \in \prod_{i\in I} A_i$ και $j \in I$ η j συντεταγμένη του α είναι η τιμή $\alpha(j)$ και συμβολίζεται α_j.

Έτσι για να δηλώσουμε ένα στοιχείο α του $\prod_{i\in I} A_i$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $(\alpha_i)_{i\in I}$. Για κάθε $i_0 \in I$ η απεικόνιση $\Pi_{i_0}: \prod_{i\in I} A_i \to A_{i_0}$, $\Pi_{i_0}((\alpha_i)_{i\in I}) = \alpha_{i_0}$ λέγεται προβολή στην i_0 συντεταγμένη.

Παραδείγματα

(1) Αν X ένα σύνολο και $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια συνόλων. Τότε

(i) $X \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X \cap A_i)$

(ii) $X \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X \cup A_i)$

*** **Άσκηση**

Έστω $f: A \to B$

$(X_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του A

$(Y_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του B

Τότε:

(i) $f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$

(ii) $f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} X_i$

$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$

$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$

Απόδειξη: Όμοια με τις αποδείξεις για εικόνες και αντίστροφες εικόνες σε τομές και ενώσεις δύο συνόλων.

(3) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσες ακολουθίες συνόλων (δηλ. $A_n \supseteq A_{n+1}$ και $B_n \supseteq B_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$)

Ν.Δ.Ο. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n) = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n)$

Απόδειξη: Για κάθε φυσικό $i \in \mathbb{N}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_i \subseteq A_i \cup B_i$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq B_i \subseteq A_i \cup B_i$

Άρα $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \subseteq A_i \cup B_i$

Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $i \in I$

$(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cup B_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ισότητα. Τότε θα υπάρχει $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$ με $x \notin (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n)$

Τότε $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ και $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin A_{n_0}$ και υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin B_{m_0}$

Θέτουμε $k = \max\{n_0, m_0\}$. Τότε $n_0 \leq k$ και $m_0 \leq k$ και (αφού δύο ακολ. συνόλων είναι φθίνουσες) $A_k \subseteq A_{n_0}$ $B_k \subseteq B_{m_0}$

Εφόσον $x \notin A_{n_0}$ προκύπτει $x \notin A_k$

Εφόσον $x \notin B_{m_0}$ προκύπτει $x \notin B_k$

άρα $x \notin A_k \cup B_k$ άτοπο διότι $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$.

Επομένως, ισχύει η ισότητα.

Αν μια συνάρτηση $f: A \to B$ είναι 1-1 και επί τότε υπάρχει η αντίστροφη $f^{-1}: B \to A$.

Αν η $f: A \to B$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι επί. Τότε αντικαθιστώντας το B με το $f(A)$ έχουμε ότι η $f: A \to f(A)$ είναι 1-1 και επί και έτσι μπορεί να οριστεί η αντίστροφη της $f^{-1}: f(A) \to A$.

Πχ

Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$ είναι 1-1 αλλά όχι επί. $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(x) = e^x$ είναι 1-1 και επί και ορίζεται η $\log = f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Αξίωμα της επιλογής:

(1) Αν $I \neq \emptyset$ και $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια μη κενών συνόλων τότε υπάρχει μια συνάρτηση $\varphi: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ ώστε $\varphi(i) \in A_i$ για κάθε $i \in I$.

→ Ισοδύναμη διατύπωση:

(2) Αν $I \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $A_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} A_i$ είναι μη κενό.

Υπάρχουν και άλλες ισοδύναμες μορφές (για άλλες η απόδειξη ότι είναι όντως ισοδύναμες είναι εύκολη για κάποιες άλλες αρκετά δύσκολη)

Λήμμα του Zorn:

(3) Αν $(A, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο ώστε κάθε αλυσίδα (= γραμμικά διατεταγμένο υποσύνολο) του A έχει άνω φράγμα στο A. Τότε το A έχει maximal στοιχείο.

(4) Για κάθε σύνολο A υπάρχει καλή διάταξη $\leq$ στο A

(5) Για δύο οποιαδήποτε σύνολα A, B υπάρχει $g: B \to A$ 1-1.

Πρόταση: Έστω A, B δυο σύνολα. Ν.Δ.Ο. τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(i) Υπάρχει $f: A \to B$ 1-1.

(ii) Υπάρχει $g: B \to A$ επί

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Επιλέγουμε τυχαίο $a \in A$. Ορίζουμε $g: B \to A$ ως εξής.

$$g(y) = \begin{cases} x & y \in f(A) \text{ με } y = f(x) \\ a & y \notin f(A) \end{cases}$$

Η g είναι καλά ορισμένη (αφού η f είναι 1-1) και προφανώς η g είναι επί διότι για κάθε $x \in A$ $g(f(x)) = x$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Εφόσον η $g: B \to A$ είναι επί για κάθε $x \in A$ το σύνολο $B_x = g^{-1}(\{x\})$ είναι μη κενό. Για κάθε $x \in A$ επιλέγουμε $a_x \in B_x$ και ορίζουμε συνάρτηση $f: A \to B$ με $f(x) = a_x \in B_x$

Η f είναι 1-1. Πράγματι αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τότε $g^{-1}(\{x_1\}) \cap g^{-1}(\{x_2\}) = \emptyset$ και εφόσον $f(x_1) = a_{x_1} \in B_{x_1} =$
$= g^{-1}(\{x_1\})$
$f(x_2) = a_{x_2} \in B_{x_2} = g^{-1}(\{x_2\})$ προκύπτει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

→ Αν Α ένα σύνολο μια (διμελής) πράξη στο Α είναι μια συνάρτηση $f: A\times A \to A$. Συνήθως, αντί για το σύμβολο $f(\alpha,b)$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\alpha f b$.
Έτσι π.χ. γράφουμε $\alpha+b$ αντί για $+(\alpha,b)$ αν η πράξη συμβολίζεται προσθετική. Αν η πράξη συμβολίζεται πολλαπλασιαστικά αντί για $\cdot(\alpha,b)$ γράφουμε $\alpha\cdot b$ ή αb.

→ Μια πράξη * στο Α λέγεται:
Προσεταιριστική: Αν $\forall \alpha,b,\gamma\in A$ $(\alpha*b)*\gamma = \alpha*(b*\gamma)$
(Αντι)μεταθετική: Αν $\forall \alpha,b\in A$ $\alpha*b = b*\alpha$
Έχει ουδέτερο στοιχείο: $e\in A$: Αν $\alpha*e = \alpha = e*\alpha$, $\forall \alpha\in A$
Αν η * έχει ουδέτερο στοιχείο το e το α' λέγεται συμμετρικό του α ως προς την * αν $\alpha'*\alpha = \alpha*\alpha' = e$
Συνήθως όταν η πράξη συμβολίζεται με + (προσθετικό) το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 0 ενώ όταν η πράξη συμβολίζεται με • (πολ/σικά) το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 1

ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζουμε σύνολο των πραγματικών αριθμών ένα σύνολο $\mathbb{R}$.
Λέμε δύο πράξεις +, ·

$+: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to x+y$ $\qquad (x,y) \to x\cdot y$

και μια σχέση < ώστε το $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ να είναι πλήρως διατεταγμένο σύνολο. Δηλαδή να ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

(R_1) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

(R_2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(R_3) Υπάρχει ένα στοιχείο $0\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

(R_4) $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, υπάρχει $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha+\beta=\beta+\alpha=0$.

(R_5) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

(R_6) $\alpha\beta=\beta\alpha$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(R_7) $\exists 1\in\mathbb{R}$ με $1\neq 0$: $1\cdot\alpha=\alpha=\alpha\cdot 1$

(R_8) $\forall \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\exists \gamma\in\mathbb{R}$: $\alpha\cdot\gamma=\gamma\cdot\alpha=1$

(R_9) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

(R_{10}) (Αρχή της τριχοτομίας), $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς μια από τις τρεις: $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$

(R_{11}) Για $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ αν $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$ τότε $\alpha<\gamma$.

Παρατήρηση: Αν ορίσουμε $\alpha\leq\beta \iff (\alpha<\beta$ ή $\alpha=\beta)$ από τα R_{10} κ' R_{11} η $\leq$ είναι γραμμ. διάταξη στο $\mathbb{R}$.

(R_{12}) $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ αν $\beta<\gamma$ τότε $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$

(R_{13}) $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ αν $\beta<\gamma$ και $\alpha>0$ τότε $\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$

(R_{14}) Αξίωμα της πληρότητας κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.

Παρατηρήσεις - Ιδιότητες:

(i) Το 0 (R_3) είναι το μοναδικό ουδέτερο της πρόσθεσης

Απόδειξη: Αν υπάρχει $0'\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει $\alpha+0'=0'+\alpha=\alpha^*$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

Τότε $0' \underset{(R_3)}{=} 0+0' \underset{(*)}{=} 0$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ το συμμετρικό του α ως προς την πρόσθεση (λόγω R_4) είναι μοναδικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω β, γ συμμετρικά του α ως προς την πρόσθεση δηλ.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha+\beta=\beta+\alpha=0 \quad (1)\\ &\alpha+\gamma=\gamma+\alpha=0 \quad (2)\end{aligned}\right\} \text{Τότε } \beta \underset{R_3}{=} \beta+0 \underset{2}{=} \beta+(\alpha+\gamma) \underset{R_1}{=} (\beta+\alpha)+\gamma \underset{1}{=} 0+\gamma \underset{R_3}{=} \gamma$$

Το γεγονός της μοναδικότητας μας δίνει τη δυνατότητα να συμβολίσουμε το μοναδικό συμμετρικό του α ως προς την πρόσθεση με $-\alpha$. Έτσι $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists$ μοναδικό $-\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$.

(iii) Το 1 είναι το μοναδικό ουδέτερο του πολλαπλασιασμού

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $1' \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha \cdot 1' = 1' \cdot \alpha = \alpha$ (1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ τότε $1' \underset{(R_8)}{=} 1' \cdot 1 \underset{(*)}{=} 1$

(iv) Για δεδομένο $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ το συμμετρικό του α ως προς τον πολλαπλασιασμό είναι μοναδικό:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Όμοια με την απόδειξη (ii)

Το γεγονός της μοναδικότητας μας δίνει την δυνατότητα για $\alpha \neq 0$ να συμβολίσουμε το μοναδικό συμμετρικό του α ως προς τον πολλαπλασιασμό με α^{-1} ή $\frac{1}{\alpha}$

(v) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad -(-\alpha)=\alpha$

(vi) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad (\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$ με $\alpha \neq 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(v) Λόγω της μοναδικότητας του αντιθέτου, αφού $\alpha+(-\alpha)=0$ προκύπτει $-(-\alpha)=\alpha$

(vi) Ομοίως

(vii) Ιδιότητα διαγραφής στην πρόσθεση

$$\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \beta=\gamma$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow (-\alpha)+(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(\alpha+\gamma)$
$\Leftrightarrow ((-\alpha)+\alpha)+\beta=((-\alpha)+\alpha)+\gamma \Leftrightarrow \beta+\gamma$

Ιδιότητα διαγραφής στον πολλαπλ.

(viii) $\alpha\beta=\alpha\gamma$ και $\alpha\neq 0$ τότε $\beta=\gamma$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εφόσον $\alpha\neq 0$ υπάρχει α^{-1}
$\alpha\beta=\alpha\gamma \Leftrightarrow (\alpha^{-1})\alpha\beta=(\alpha^{-1})\alpha\gamma$
$\Leftrightarrow (\alpha^{-1}\alpha)\beta=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\gamma \Leftrightarrow 1\beta=1\cdot\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma.$

(ix) Απορροφητική ιδιότητα του 0 στον πολλαπλ.

$$\alpha\cdot 0=0 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\alpha\cdot 0+\cancel{\alpha\cdot 0}=\alpha(0+0)=\alpha\cdot 0=\cancel{\alpha\cdot 0}+0 \Leftrightarrow$
$\alpha\cdot 0=0.$